内江师范学院第一届数学专业竞赛试题（A）参考答案

1. （15 分）证明曲面S：$(x-z)^2+(y+z-a)^2=a^2$是一个柱面.

证　由$(x-z)^2+(y+z-a)^2=a^2$得 $(x-z)^2=a^2-(y+z-a)^2$，

即：$(x-z)^2=(y+z)(2a-y-z)$

从而有：$\begin{cases}\mu(x-z)=\lambda(y+z)\\ \lambda(x-z)=\mu(2a-y-z)\end{cases}$，即：$\begin{cases}\mu x-\lambda y-(\mu+\lambda)z=0\\ \lambda x+\mu y+(\mu-\lambda)z-2a\mu=0\end{cases}$

这是一族直线，如果消去参数λ就得原方程，所以原方程表示的曲面由这族直线所生成的，而这族直线的方向为：

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix}-\lambda & -(\mu+\lambda)\\ \mu & \mu-\lambda\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-(\mu+\lambda) & \mu\\ \mu-\lambda & \lambda\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mu & -\lambda\\ \lambda & \mu\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2+\mu^2):[-(\lambda^2+\mu^2)]:(\lambda^2+\mu^2)=1:(-1):1$$

所以这是一族平行直线，因此由它所生成的曲面是一个柱面.

2. (10 分) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln i-n\ln n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\dfrac{i}{n}\right)=\int_0^1\ln xdx=-1.$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$

3. (10 分)设数列$x_1=1,x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}(n=1,2,3,\cdots)$ ，证明该数列存在极限，并且求该极限.

解：由于$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{1+x_n}-\dfrac{1}{1+x_{n-1}}=\dfrac{x_{n-1}-x_n}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$。

$\because 0\le x_n\le 1,\dfrac{1}{2}\le x_n\le 1\therefore |x_{n+1}-x_n|\le\dfrac{1}{(\frac{3}{2})^2}|x_{n-1}-x_n|=\dfrac{4}{9}|x_{n-1}-x_n|$。

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_{n-1}-x_n|}<1$。

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n-1}-x_n)$收敛，即$S_n=x_{n+1}-x_1$级数与数列收敛等价。设$\lim x_n=A$，则有

$A=\frac{1}{1+A}\Rightarrow A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$（舍去）。

4. (10 分) 已知 $0<a_1,a_2<1$，φ: $[0,1]\to[0,1]$ 连续函数，且满足

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_2\varphi(\frac{x}{a_1}), 0\le x\le a_1, \\ (1-a_2)\varphi(\frac{x-a_1}{1-a_1}), a_1<x\le 1. \end{cases}$$

求积分 $\int_0^1 \varphi(x)dx.$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx=\int_0^{a_1} a_2\varphi(\frac{x}{a_1})dx+\int_{a_1}^1((1-a_2)\varphi(\frac{x-a_1}{1-a_1})+a_2)dx$$

$$=\int_0^1 a_1a_2\varphi(t)dt+\int_a^1(1-a_2)\varphi(\frac{x-a_1}{1-a_1})dx+\int_{a_1}^1 a_2dx$$

$$=a_1a_2+(1-a_2)(1-a_1)\int_0^1\varphi(t)dt+a_2(1-a_1)$$

$$\Rightarrow\int_0^1\varphi(x)dx=\frac{a_2(1-a_1)}{a_1+a_2-2a_1a_2}.$$

5. (10 分) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数

解：$\frac{n^3+1+1}{(n+1)!}(x-1)^n=\frac{(n^2-n+1)}{n!}(x-1)^n+\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$

$$=\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n+\frac{(x-1)^n}{n!}+\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^{n-2}(x-1)^2+\frac{(x-1)^n}{n!}++\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

由于 $e^{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$, $e^{x-1}(x-1)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n$. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}=A$，则

$$A(x-1)+1=e^{x-1}\Rightarrow A=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$$

故原式 $=e^{x-1}(x-1)^2+e^{x-1}+\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。

5.

6. （10 分）计算二重积分$\iint_D e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由直线$x=0,\ y=1,\ y=x$围成的闭区域.

解：$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 e^{-y^2}ydy=-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y^2}d(-y^2)$

$$=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}(e^{-1}-1)=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

（如果按照$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 e^{-y^2}dy$，则求不出，必须交换次序）

7. 试用正交线性替换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

的标准型, 并写出所用的正交替换和所得的标准型.

解：由题有该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$$

因此$|\lambda\mathrm{E}-\mathrm{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

当$\lambda=2$时，求解$(2\mathrm{E}-\mathrm{A})\mathrm{X}=0$，求解基础解系$\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，

施行正交化过程$\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$，再单位$\gamma_1=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix}$

当$\lambda=-7$时，求解$(-7\mathrm{E}-\mathrm{A})\mathrm{X}=0$，求解基础解系$\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\\frac{-2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，

令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，

于是令 X=QY 便为所求，

其标准型为$2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$.

7. 设

$W_1=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathrm{P}^n \middle| x_1+x_2+\cdots+x_n=0\right\}$,

$W_2=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \mathrm{P}^n \middle| x_1=x_2=\cdots=x_n\right\}$

证明$P^n=W_1\oplus W_2$.

证明： 设$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},\cdots,\alpha_{n-1}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\-1\\1\end{pmatrix}$,，则

$$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$$

设$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$的基础解系为$\alpha_n=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，则$W_1=L(\alpha_n)$

$P^n=W_1+W_2$,

又因为$\dim P^n=\dim W_1+\dim W_2=$（$n$-1)+1=n ,

因此$P^n=W_1\oplus W_2$.